Solucionario de

Ejercicios de repaso y autoevaluación

Solucionario Capítulo 1

1. **Calcular las siguientes expresiones numéricas:**

a. $-2 \cdot 5 - 3 \cdot [-4 + 5 - 2\,(3 - 6)^2 + 8] \cdot 2 - 1$

SOLUCIÓN:

$-3 \cdot [(5 - 2^2) - 4\,(4 -2)^2] + (-4 + 5) =$
$= -3\,[(5 - 4) - 4\,(2)^2\,] + (1) =$
$= -3\,[\,(1) - 4 \cdot 4] + 1 =$
$= -3\,[(1) - 16] + 1 =$
$= -3\,[-15] + 1=$
$= 45 + 1 = \mathbf{46}$

b. $8 - [2 \cdot (1 - 3)^3 + 5 \cdot (5 - 2)^2 \cdot (-3)^3] =$

SOLUCIÓN:

$8 - [2 \cdot (1 - 3)^3 + 5 \cdot (5 - 2)^2 \cdot (-3)^3] =$
$= 8 - [2 \cdot (-2)^3 + 5 \cdot (3)^2 \cdot (-27)] =$
$= 8 - [2 \cdot (-8) + 5 \cdot 9 \cdot (-27)] =$
$= 8 - [-16 + 1.215] =$
$= 8 - 1.199$ **= 1.191**

c. $\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$

SOLUCIÓN:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \left(\frac{2}{4} - \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \left(\frac{2-3}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{4} =$$

$$= \left(\frac{-1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \left(\frac{-1 \cdot 1}{4 \cdot 2}\right) - \frac{3}{4} = \left(\frac{-1}{8}\right) - \frac{3}{4} = \frac{-1}{8} - \frac{6}{8} \mathbf{= \frac{-7}{8}}$$

d. $\frac{5}{2} \cdot \frac{7}{4} + \frac{3}{2} : \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$

SOLUCIÓN:

$$\left(\frac{5}{2} \cdot \frac{7}{4}\right) + \left(\frac{3}{2} : \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2} = \frac{35}{8} + \frac{9}{4} - \frac{1}{2} = \frac{35}{8} + \frac{18}{8} - \frac{4}{8} = \mathbf{\frac{49}{8}}$$

e. $-6 - \frac{2}{3} : \frac{6}{4} + 3\left(5 - \frac{1}{9}\right)$

SOLUCIÓN:

$$-8 - \left(\frac{2}{3} : \frac{6}{4}\right) + 3\left(5 - \frac{1}{9}\right) = -8 - \frac{8}{18} + 3\left(\frac{45}{9} - \frac{1}{9}\right) = -8 - \frac{8}{18} + 3\left(\frac{44}{9}\right) =$$

$$= -8 - \frac{8}{18} + \frac{132}{9} = -\frac{8 \cdot 18}{18} - \frac{8}{18} + \frac{132 \cdot 2}{18} = \frac{-144 - 8 + 264}{18} = \mathbf{\frac{112}{18}}$$

2. **A una reserva de la vida salvaje van a llegar 240 impalas y 9 leones. Las jaulas en las que se transportan deben ser iguales y lo más grandes posible, y todas deben transportar el mismo número de animales. ¿Cuántos animales deben ir en cada jaula, si se pretende que los leones no se coman a los impalas? ¿Cuántas jaulas serán necesarias? (Se tomarán las precauciones necesarias para que ni los leones ni los impalas se ataquen dentro de su jaula).**

   Para evitar que los leones se coman a los impalas, deben trasladarse en jaulas separadas. Hay que encontrar un divisor común de 240 y 9, y que además sea el mayor.

   Se hace la descomposición factorial de ambas cantidades:

$$240 = 24 \cdot 3 \cdot 5$$
$$9 = 3^2$$

   Y se calcula el m.c.d. (240, 9) = 3
   El número máximo de animales por jaula es de 3.

Serán necesarias:

$$240 : 3 = 80 \text{ jaulas para impalas}$$
$$9 : 3 = 3 \text{ jaulas para leones}$$

3. Luis tiene la intención de invertir 2/6 de su presupuesto semanal en alimentación, 3/7 en unas reformas y 2/3 en ocio. ¿Podrá hacerlo sin recurrir a su fondo para emergencias? En caso de tener que recurrir a dicho fondo, ¿qué parte del presupuesto correspondería a lo tomado del fondo de reserva?

Habrá que calcular a cuánto ascienden los gastos previstos:

$$\frac{2}{6}+\frac{3}{7}+\frac{2}{3}=\frac{14+18+24}{42}=\frac{56}{42}$$

El máximo que Luis podría gastar sería 42/42.

$$\frac{56}{42}>\frac{42}{42}$$

Luis deberá recurrir al fondo de reserva. Para conocer la cuantía de los gastos que corresponden a loa que se ha tomado del fondo de reserva, hay que averiguar primero lo que se ha gastado de más:

$$\frac{56}{42}-\frac{42}{42}=\frac{14}{42}$$

La fracción se puede reducir:

$$\frac{14}{42}-\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$$

Luego 1/3 de lo que Luis piensa gastar esta semana, deberá sacarlo del fondo de reserva.

4. Realizar las siguientes operaciones:

a. $2\frac{8}{9}+3\frac{5}{6}$

SOLUCIÓN:

$$2\frac{8}{9}+3\frac{5}{6}=\frac{9\cdot 2+8}{9}+\frac{6\cdot 3+5}{6}=\frac{18+8}{9}+\frac{18+5}{6}=$$

$$=\frac{26}{9}+\frac{23}{6}=\frac{2\cdot 26+3\cdot 23}{18}=\frac{52+69}{18}=\frac{121}{18}\mathbf{=6\frac{13}{18}}$$

También puede hacerse sumando por un lado las partes enteras y por otro las decimales, es decir:

$$2+\frac{8}{9}+3\frac{5}{6}=5+\left(\frac{8}{9}+\frac{5}{6}\right)=5+\frac{2\cdot 8+3\cdot 5}{18}=5+\frac{16+15}{18}=5+\frac{31}{18}=\frac{121}{18}\mathbf{=6\frac{13}{18}}$$

b. $15\frac{1}{4}-12\frac{7}{5}$

SOLUCIÓN:

$$15\frac{1}{4}-12\frac{7}{5}=\frac{15\cdot 4+1}{4}-\frac{12\cdot 5+7}{5}=\frac{61}{4}-\frac{67}{5}=\frac{305-268}{20}=\frac{37}{20}\mathbf{=1\frac{17}{20}}$$

c. $11\frac{2}{7}-3\frac{3}{5}$

SOLUCIÓN:

$$11\frac{2}{7}-3\frac{3}{5}=\frac{7\cdot 11+2}{7}-\frac{5\cdot 3+3}{5}=\frac{79}{7}-\frac{18}{5}=\frac{5\cdot 79-7\cdot 18}{35}=\frac{269}{35}\mathbf{=7\frac{24}{35}}$$

5. Ana ha vendido en su boutique tres trajes de novia. De esta venta ha obtenido un beneficio total de 6.000 €. Si los precios que ha pagado a fábrica son, respectivamente 800, 900 y 300 €, ¿qué beneficio ha obtenido de cada uno, si ha sido proporcional al precio que ha pagado por ellos?

La cantidad que se obtiene por la venta de cada uno de los vestidos es directamente proporcional a su coste en el almacén. Se trata de un reparto proporcional directo. Llamando x, y, z a las cantidades que se ha pagado por cada uno, se puede escribir:

$$\frac{x}{800}=\frac{y}{900}=\frac{z}{300}=\frac{x+y+z}{800+900+300}=\frac{6.000}{2.000}=3$$

De aquí pueden obtenerse tres igualdades que se resuelven por separado:

$$\frac{x}{800}=3 \rightarrow x=3\cdot 800=2.400\ €$$
$$\frac{y}{900}=3 \rightarrow y=3\cdot 900=2.700\ €$$
$$\frac{z}{300}=3 \rightarrow z=3\cdot 300=900\ €$$

6. Un pintor ha recibido 1500 € por pintar tras habitaciones de 60, 45 y 20 m², respectivamente. ¿Cuánto ha costado pintar cada habitación, si el precio es proporcional a la superficie de cada una?

Se trata de un reparto proporcional directo. Llamando x, y, z a las cantidades que se ha pagado por cada uno, se puede escribir:

$$\frac{x}{60}=\frac{y}{45}=\frac{z}{20}=\frac{x+y+z}{60+45+20}=\frac{1.500}{125}=12\ €/m^2$$

De aquí pueden obtenerse tres igualdades que se resuelven por separado:

$$\frac{x}{60}=12 \rightarrow x=12\cdot 60=720\ €$$
$$\frac{y}{45}=12 \rightarrow y=12\cdot 45=540\ €$$

$$\frac{z}{12} = 12 \rightarrow z = 12 \cdot 20 = 240\ €$$

7. En una ludoteca hay 22 niños. Se establecen tres grupos de edad, según tengan 1, 2 o 3 años. ¿Cuántos niños hay en cada grupo, si el reparto es inversamente proporcional a la edad?

Se llamarán x, y y z el número de niños que hay en cada grupo de 1, 2 y 3 respectivamente. Su suma será $x + y + z = 22$ niños.

Hay que tener en cuenta que si las cantidades x, y y z deben ser inversamente proporcionales a las edades 1, 2 y 3, serán, respectivamente, directamente proporcionales a sus inversos:

$$\frac{x}{\frac{1}{1}}, \frac{y}{\frac{1}{2}} \text{ y } \frac{z}{\frac{1}{3}}$$

Aplicando el mismo método que para el reparto directamente proporcional, se puede poner:

$$\frac{x}{\frac{1}{1}} = \frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{z}{\frac{1}{3}} = \frac{x+z+y}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = \frac{22}{\frac{11}{6}} = \frac{22 \cdot 6}{11} = 12$$

Ahora se calculan las incógnitas x, y y z planteando las tres igualdades por separado:

8. En una clase de 25 niños, el 40 % recibe clases de refuerzo de inglés y el 60 %, clases de refuerzo de matemáticas. ¿Cuántos niños, de esta clase, hay en cada clase de refuerzo?. De los niños que acuden a clases de refuerzo, 5 lo hacen tanto a inglés como a matemáticas. ¿Qué tanto por ciento representan?

En el primer caso, se conoce el todo, el %, pero se desconoce la parte. Llamando x al número de niños que acude a refuerzo de inglés, se tendrá :

$$\frac{x}{25} = \frac{40}{100} \rightarrow x = \frac{25 \cdot 40}{100} = 10$$

El planteamiento para calcular el número de niños que acude a refuerzo de matemáticas es el mismo: Llamando y al número de niños que acude a refuerzo de matemáticas, se tendrá:

$$\frac{y}{25}=\frac{60}{100}\rightarrow y=\frac{25\cdot 60}{100}=15$$

En el segundo caso, se conoce el todo, la parte, pero se desconoce el %. Para calcular ese %, se planea la siguiente igualdad:

$$\frac{5}{25}=\frac{z}{100}\rightarrow z=\frac{5\cdot 100}{4}=20\ \%$$

9. Mercedes tiene un seguro de automóvil, por el que el año pasado pagó 537 €. Le ha comunicado que le va a aplicar una bonificación de 120 € por la antigüedad en la compañía. No obstante, como presentó un parte, la cuantía inicial se incrementará un 36 %. ¿A cuánto asciende el seguro que tiene que pagar este año? ¿Y si la penalización se calcula sobre el precio ya bonificado?

En primer lugar hay que calcular a cuánto asciende la penalización por haber presentado el parte:

$$\frac{x}{36}=\frac{537}{100}\rightarrow x=\frac{537\cdot 36}{100}=193{,}32\ €$$

La cuantía que habría que pagar este año, sería:

$$537 + 193{,}32 - 120 = 610{,}32\ €$$

En el segundo caso, el importe de partida, tras la bonificación, sería: 537 – 120 = 417 €.

Si la penalización se aplica sobre el precio bonificado, ascendería a:

$$\frac{x}{36}=\frac{417}{100}\rightarrow x=\frac{417\cdot 36}{100}=150{,}12\ €$$

Y la cuantía que habría que pagar este año, sería: 417 + 150,12 = 567,12 €

10. Peter ha estado de vacaciones en España, y ha realizado compras en diversos comercios tradicionales por un importe total de 600 €, incluido IVA del 21 % en todos los productos. En las tiendas duty free del aeropuerto, compra productos iguales a los que lleva, por los que paga 550 €. ¿A cuánto ascenderá el IVA devuelto? ¿Qué compra le habrá resultado más ventajosa, teniendo en cuenta que obtendrá la devolución del IVA de los productos comprados en los establecimientos tradicionales?

La devolución del IVA, supone una disminución porcentual, equivalente al incremento que supone este impuesto sobre el precio de los artículos. Esta disminución habría que aplicarla solo a los artículos comprados en los establecimientos tradicionales. El importe de estos artículos, sin IVA, será:

$$\frac{600}{x} = \frac{121}{100} \rightarrow x = \frac{600 \cdot 100}{121} = 495{,}86\ €$$

Por lo tanto, el importe devuelto será: 600 – 495.86 = 104,14 €.

Como el precio de los artículos comprados en los comercios tradicionales, tras la devolución del IVA es menor que el de los que ha comprado en las tiendas duty free del aeropuerto, le ha resultado más ventajosa la compra en los comercios tradicionales.

Solucionario Capítulo 2

1. **Realizar los siguientes cambios de unidades de longitud:**

   a. Expresar en m las siguientes medidas: 35 dm; 78 dam; 3.698 mm; 26,3 km.

   En cada escalón se multiplica o divide por 10

   35 dm **(hay que subir un escalón) = 3,5 m**
   78 dam **(hay que bajar un escalón) = 780 m**
   3.698 mm **(hay que subir tres escalones) = 3,698 m**
   26,3 km **(hay que bajar tres escalones) = 26.300 m**

   b. Expresar en mm las siguientes medidas: 5,6 cm, 35 dm, 8 m, 1,5 dam.

   En cada escalón se multiplica o divide por 10

   5,6 cm **(hay que bajar un escalón) = 56 mm**
   35 dm **(hay que bajar dos escalones) = 3.500 mm**
   8 m **(hay que bajar tres escalones) = 8.000 mm**
   1,5 dam **(hay que bajar cuatro escalones) = 15.000 mm**

   c. Expresar en dam las siguientes medidas: 72 cm, 300 dm, 96 mm, 3,5 hm.

   En cada escalón se multiplica o divide por 10

   72 cm **(hay que subir tres escalones) = 0,072 dam**
   300 dm **(hay que subir dos escalones) = 3 dam**
   96 mm **(hay que subir cuatro escalones) = 0,0096 dam**
   3,5 hm **(hay que bajar un escalón) = 35 dam**

2. **Carmen sale de casa y recorre 500 m 30 dm 15 cm hasta la panadería; luego recorre 100 m 250 dm 300 cm hasta la frutería, y 90 m 60 dm 185 cm, hasta llegar a casa de su madre. ¿Qué distancia hay entre la casa de Carmen y la de su madre, en metros?**

   La distancia total será la suma de las distancias parciales que ha recorrido Carmen:

	500 m	30 dm	15 cm
	100 m	250 dm	300 cm
+	90 m	60 dm	185 cm
	690 m	340 dm	500 cm

Se pasan ahora los dm y los cm a metros. De dm a m hay que subir un escalón, luego hay que dividir por 10, con lo que se obtiene que 340 dm = 34 m

De cm a m hay que subir dos escalones, luego hay que dividir por 100, con lo que se obtiene que 500 cm = 5 m

Sumando ahora todas las cantidades, en m, se obtiene 690 + 34 + 5 = 729 m es la distancia entre la casa de Carmen y la de su madre.

3. **Realizar los siguientes cambios de unidades de superficie:**

   a. Expresar en cm^2 las siguientes medidas: 4,8m^2 , 65 dm^2, 985 mm^2 , 0,23 m^2.

      En cada escalón se multiplica o divide por 100

      4,8 m^2 **(hay que bajar dos escalones)= 48.000 cm^2**
      65 dm^2 **(hay que bajar un escalón)= 6.500 cm^2**
      985 mm^2 **(hay que subir un escalón)= 9,85 cm^2**
      0,23 m^2 **(hay que bajar dos escalones)= 2.300 cm^2**

   b. Expresar en mm^2 las siguientes medidas: 360 cm^2, 0,7 cm^2, 0,02 dm^2 , 0,015 m^2.

      En cada escalón se multiplica o divide por 100

      360 cm^2 **(hay que bajar un escalón)= 36.000 mm^2**
      0,7 cm^2 **(hay que bajar un escalón)= 70 mm^2**
      0,02 dm^2 **(hay que bajar dos escalones)= 200 mm^2**
      0,015 m^2 **(hay que bajar dos escalones)= 150 mm^2**

   c. Expresar en m^2 las siguientes medidas: 8.420 cm^2, 1,5 dam^2, 150.000 mm^2, 201 dm^2.

      En cada escalón se multiplica o divide por 100

8.420 cm^2 **(hay que subir dos escalones)= 0,842 m^2**
1,5 dam^2 **(hay que bajar un escalón) = 150 m^2**
150.000 mm^2 **(hay que subir tres escalones)= 0,15 m^2**
201 dm^2 **(hay que subir un escalón)= 2,01 m^2**

4. Raúl tiene plantadas 1,8 hectáreas de aguacate, que producen 3,5 kg por metro cuadrado. ¿Cuántos kilos de aguacates producirá?

Hay que hallar el equivalente en m^2 de la plantación, antes de multiplicar los kg que produce por m^2, por los m^2 totales.

Como la equivalencia es 1 Ha = 1hm^2 = 10.000 m^2, la superficie plantada de aguacates, en m^2 es:

$$1{,}8 \cdot 10.000 = 18.000 \ m^2$$

como cada m^2 produce 3,5 kg de aguacates, la producción total será de:

$$18.000 \cdot 3{,}5 = 63.000 \text{ kg de aguacates.}$$

5. Realizar los siguientes cambios de unidades de superficie:

a. Expresar 20 km^2 12 dam^2 8 m^2 en m^2

km^2 → 20
hm^2 →→ 00 (se completa el orden con 00)
dam^2 →→ 12 (se completa el orden con 0)
m^2 →→→→ 08 (se completa el orden con 0)
20 km^2 12 dam^2 8 m^2 = 20.001.208 m^2

b. Expresar 218.389,23 m^2 en número complejo de superficie.

Separando en grupos de 2 y completando los órdenes a ambos lados de la coma:

21 83 89, 23
21 hm^2
83 dam^2
89 m^2
23 dm^2

218.389,23 m² = 21 hm² 83 dam² 89 m² 23 dm²

6. **Realizar los siguientes cambios de unidades de volumen:**

   a. Expresar en cm³ las siguientes medidas: 0,24 m³, 140 dm³, 13.870 mm³, 0,06 m³.
   En cada escalón se multiplica o divide por 1.000

   0,24 m³ **(hay que bajar dos escalones)= 240.000 cm³**
   140 dm³ **(hay que bajar un escalón) = 140.000 cm³**
   13.870 mm³ **(hay que subir un escalón) = 13,87 cm³**
   0,06 m³ **(hay que bajar dos escalones) = 60.000 cm³**

   b. Expresar en mm³ las siguientes medidas: 0,6 cm³, 3,07 cm³, 0,00005 dm³, 0,24 m³.

   En cada escalón se multiplica o divide por 1.000

   0,6 cm³ **(hay que bajar un escalón) = 600 mm³**
   3,07 cm³ **(hay que bajar un escalón) = 3.070 mm³**
   0,00005 dm³ **(hay que bajar dos escalones) = 50 mm³**
   0,024 m³ **(hay que bajar tres escalones)= 24.000.000 mm³**

   c. Expresar en m³ las siguientes medidas: 12.000 cm³, 5 dam³, 16.340 dm³, 6 hm³.

   En cada escalón se multiplica o divide por 1.000

   12.000 cm³ **(hay que subir dos escalones) = 0,012 m³**
   5 dam³ **(hay que bajar un escalón) = 5.000 m³**
   16.340 dm³ **(hay que subir un escalón) = 16,34 m³**
   6 hm³ **(hay que bajar dos escalones) = 6.000.000 m³**

7. **Realizar los siguientes cambios de unidades de volumen:**

   a. Expresar en m³ las siguientes medidas: 250 l, 2,89 hl, 5.400,5 cl, 5.000 ml.

   En cada escalón de las medidas de capacidad se multiplica o divide por 10, tener en cuenta que 1 l, equivale a 1 dm³, y que en cada escalón de las medidas de volumen se multiplica o divide por 1.000

250 l **(hay que subir un escalón en las medidas de volumen)= 0,25 m³**
2,89 hl **(hay que bajar dos escalones en las medidas de capacidad, y subir uno más en las de volumen)= 0,289 m³**
5.400,5 cl **(hay que subir dos escalones en las medidas de capacidad, y uno más en las de volumen) = 0.054005 m³**
5.000 ml **(hay que subir tres escalones en las medidas de capacidad, y uno más en las de volumen)= 0,005 m³**

b. Expresar en l las siguientes medidas: 0,3 m³, 250 cm³, 18 dm³, 1.000 cm³.

En cada escalón de las medidas de volumen se multiplica o divide por 1.000, y tener en cuenta que 1 dm³ equivale a 1 l,

0,3 m³ **(hay que bajar un escalón en las medidas de volumen, para llegar al dm³)= 300 l**
250 cm³ **(hay que subir un escalón en las medidas de volumen, para llegar al dm³) = 0,25 l**
18 dm³ = **18 l**
1.000 cm³ **(hay que subir un escalón en las medidas de volumen, para llegar al dm³)= 1 l**

8. Carlos tiene plantados 3.000 naranjos. Se necesitan 47 l de agua para su riego diario. ¿Qué capacidad mínima deberá tener una balsa, en hm³, para garantizar el riego durante un mes?

Primeramente hay que calcular el agua que se consumirá en un mes:

$$3.000 \cdot 47 \cdot 30 = 4.230.000 \text{ litros}$$

Ahora, hay que calcular cuál es el equivalente en hm³ de esos litros, teniendo en cuenta que 1 l, equivale a 1 dm³, y que en cada escalón de las medidas de volumen se multiplica o divide por 1.000. Así,

4.230.000 litros = 4.230.000 dm³ (hay que subir tres escalones en las medidas de volumen)= 0,00423 hm³

9. Realizar los siguientes cambios de unidades de masa:

a. Expresar en g las siguientes medidas: 36 hg, 250 mg, 1,7 kg, 280 cg.

En cada escalón se multiplica o divide por 10

36 hg **(hay que bajar dos escalones)= 3.600 g**
250 mg **(hay que subir tres escalones)= 0,25 g**
1,7 kg **(hay que bajar tres escalones)= 1.700 g**
280 cg **(hay que subir dos escalones)= 2,8 g**

b. Expresar en kg las siguientes medidas: 1,5 t, 1,5 hg, 1.650 g.

En cada escalón se multiplica o divide por 10. De t a kg hay tres escalones

1,5 t **(hay que bajar tres escalones)= 1.500 kg**
1,5 hg **(hay que subir un escalón)= 0,15 kg**
1.650 g **(hay que subir tres escalones)= 1,650 kg**

c. Expresar en t las siguientes medidas: 2.300 kg, 20.000 g, 369 hg.

En cada escalón se multiplica o divide por 10. De t a kg hay tres escalones

2.300 kg **(hay que subir tres escalones) = 2,3 t**
20.000 g **(hay que subir seis escalones)= 0,02 t**
369 hg **(hay que subir cuatro escalones)= 0,0369 t**

10. Una puerta está abierta un ángulo de 90º. Se entorna primero 43º 22' 57" y luego 27º 47' 22" más. ¿Cuántos grados más deberá entornarse, para que quede completamente cerrada?

El ángulo que se busca es el complementario de un ángulo resultado de sumar los ángulos que ya se ha cerrado la puerta. Por eso, primero hay que calcular cuál es ese ángulo:

$$\begin{array}{r} 43^\circ\ 22'\ 57'' \\ +\ 27^\circ\ 47'\ 22'' \\ \hline 70^\circ\ 69'\ 79'' \end{array}$$

En esta suma, tanto 69’ como 79” son superiores a 60 por lo que hay que buscar expresiones equivalentes:

- Para los segundos: 79” : 60 => 1’ 19”
- Para los minutos: 69’ : 60 => 1º 09’

por lo que 70º 69’ 79” será igual a la suma siguiente:

$$\begin{array}{r} 70^\circ\,00'\,00'' \\ 01^\circ\,09'\,00'' \\ +\quad 01'\,19'' \\ \hline 71^\circ\,10'\,19'' \end{array}$$

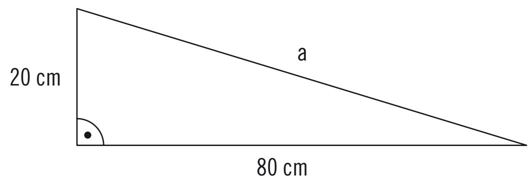
llamando â al ángulo pedido se tiene que:

$$\hat{a} = 90^\circ - 71^\circ\,10'\,19'' = 89^\circ\,59'\,60'' - 71^\circ\,10'\,19'' = 18^\circ\,49'\,41''$$

Solucionario Capítulo 3

1. Se han levantado las aceras de una calle para colocar una conducción. La zanja mide 80 cm de ancho. Si el desnivel entre la calle y los edificios es de 20 cm, ¿cuál es la longitud mínima de la pasarela que debe colocarse para acceder a ellos, si debe ser al menos 30 cm mayor que la distancia a salvar, para poder ser segura?

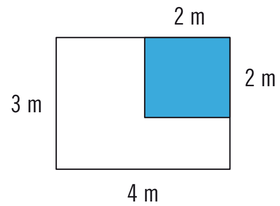
Se puede representar la distancia a salvar como un triángulo rectángulo, en el que se desconoce uno de los lados: la parte de la pasarela que cubrirá el hueco, que se representa por la letra a, y que corresponde a la hipotenusa de un triángulo rectángulo.



$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{20^2 + 80^2} = \sqrt{400 + 6.400} = \sqrt{6.800} = 82{,}46 \text{ cm}$$

La pasarela deberá tener como mínimo, 82,46 + 30 = 112,46 cm.

2. En el patio de su casa, Pablo ha colocado una piscina de hidromasaje como la indicada. ¿Cuál es la superficie que queda libre?



La forma más fácil de calcular la superficie libre es calculando la diferencia entre la superficie total del patio y la ocupada por la piscina. El patio tiene superficie rectangular, y su área es:

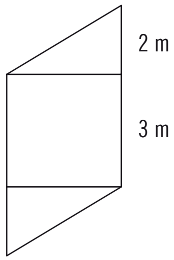
$$A1 = b \cdot a = 4 \cdot 3 = 12 \text{ m}^2$$

La piscina tiene forma cuadrada y su superficie es:

$$A2 = l^2 = 2^2 = 4 \text{ m}^2$$

La superficie libre es $A = A1 - A2 = 12 - 4 = 8 \text{ m}^2$

3. **Calcular el área de la siguiente figura:**



Esta figura puede considerarse la composición de un trapecio donde B = 5, b = 3 y su altura a = 3 y un triángulo donde B = 2 y a= 3.

Aplicando las fórmulas correspondientes se obtiene:

$$A_1 = \frac{(B + b) \cdot a}{2} = \frac{(5 + 3) \cdot 3}{2} = 12$$

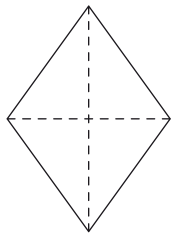
$$A_2 = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$$

$$AT = A_1 + A_2 = 12 + 3 = 15 \text{ m}$$

Sin embargo, el resultado sería el mismo si se calculara aplicando la fórmula del trapecio, en la que las dos bases tienen la misma dimensión:

$$A = \frac{(B + B) \cdot a}{2} = \frac{(5 + 5) \cdot 3}{2} = 15 \text{ m}$$

4. ¿Cuál es el área de un rombo, si su perímetro es 35,78 cm y su diagonal mayor mide 16 cm?



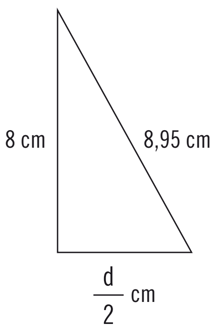
El área del rombo, se calcula mediante la fórmula:

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

por lo que deben conocerse las dos diagonales. Se da el valor de la diagonal mayor D = 16 cm, luego solo falta conocer el valor de d.

Al trazar las diagonales del rombo se observa que este queda dividido en cuatro triángulos rectángulos, cuyos catetos medirán la mitad que las diagonales.

En estos triángulos rectángulos, se conoce el valor de la hipotenusa, ya que $P = 4 \cdot L$, por lo que $L = P/4 = 35{,}78/4 = 8{,}95$ cm, el de uno de los catetos $D/2 = 16/2 = 8$ cm, por lo que para calcular el otro cateto, que coincidirá con la semidiagonal del rombo, d, se aplica el teorema de Pitágoras:



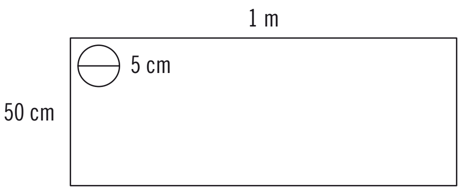
$$\frac{d}{2} = \sqrt{8{,}95^2 - 8^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

Luego d = 2 · 4 = 8 cm

Sustituyendo en la fórmula de partida, se obtiene:

$$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{16 \cdot 8}{2} = 64 \text{ cm}^2$$

5. Se tiene una plancha de masa para galletas de 1 x 0,5 m². Los moldes de las galletas tienen un diámetro de 5 cm. ¿Cuánta masa se desperdiciará en los cortes, al colocar los moldes completamente juntos? ¿Cuántas galletas más podrían obtenerse con esa masa, si se vuelve a extender, hasta que no se puedan formar más galletas? ¿Y la masa restante?



La masa que o se aprovecha en la elaboración de las galletas, será la diferencia entre la superficie total de la plancha de masa y la de todas las galletas que pueden obtenerse.

Como la plancha tiene 1 m de longitud y las galletas 5 cm de diámetro, recordando que 1 m = 100 cm, podrán sacarse 100 : 5 = 20 galletas de la longitud de la plancha de masa.

Como la plancha tiene 0,5 m de anchura, que en cm equivalen a 0,5 x 100 = 50 cm, del ancho de la plancha se obtienen 50 : 5 = 10 galletas.

El total de galletas que se obtiene de la plancha de masa es 20 · 10 = 200 galletas.

La superficie de una galleta es $Ag = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 2{,}5^2 = 19{,}6 \text{ cm}^2$
Si se multiplica por el total de galletas, se obtiene 19,6 · 200 = 3.925 cm²
La superficie del rectángulo de masa es 100 · 50 = 5.000 cm²
La diferencia entre ambas es 5.000 – 3.925 = 1.075 cm²

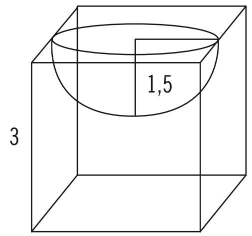
El número de galletas que podría obtenerse, extendiendo la masa en sucesivas ocasiones, se obtendría dividiendo la masa restante entre la superficie de cada galleta. Con esos 1.075 : 19,6 = 54,8 cm²

Como el número de galletas debe ser un número entero, correspondería a la parte entera del número decimal obtenido, 54 galletas.

Para calcular la masa restante, se haría $54 \cdot 19{,}6 = 1.058.4\ cm^2$

$$1.075 - 1.058{,}4 = 16{,}6\ cm^2$$

6. ¿Cuál es la capacidad de un cubo de 3 m de lado, si en su interior se ha ahuecado una semiesfera de igual diámetro?



La capacidad será la diferencia de los volúmenes de ambos cuerpos.

El volumen del cubo se calculará como $Vc = l \cdot l \cdot l = l^3 = 3^3 = 27\ m^3$

El volumen de la semiesfera, será ½ de la esfera de 1,5 m de radio.

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\ \pi \cdot r^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\ \pi \cdot 1{,}5^3 = 7{,}065\ m^3$$

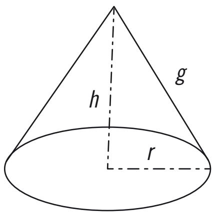
La capacidad de cubo, será: $27 - 7{,}065 = 19{,}935\ m^3$

7. ¿Qué superficie de cartulina se necesitará para fabricar un capirote de nazareno, de 60 cm de altura, para una cabeza de 20 cm de diámetro?

El capirote tiene forma de tronco de cono. La superficie será la del área lateral del tronco de cono, ya que no tiene base.

La fórmula para calcular la superficie lateral del tronco de cono es:

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g$$



donde g es la longitud de la generatriz del cono recto del triángulo rectángulo que tiene por catetos la altura h del cono y el radio r de la base, es decir:

$$g^2 = r^2 + h^2$$
$$g = \sqrt{h^2 + r^2}$$

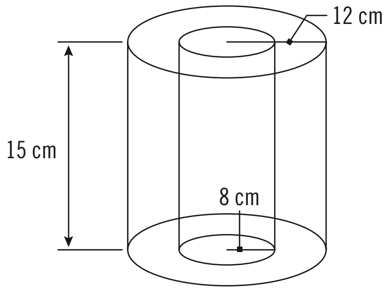
sustituyendo h = 60 cm y r = 10 cm, en la ecuación anterior se obtiene para g un valor de:

$$g = \sqrt{60^2 + 10^2} = 60{,}83 \text{ cm}$$

Al sustituir ahora en la fórmula

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 10 \cdot 60{,}83 = 1.910{,}62 \text{ cm}^2$$

8. ¿Cuál será la superficie a pintar, en m², en un tubo cilíndrico, de 15 cm de altura, si el radio exterior es 12 cm, el interior 8 cm, y se pintarán tanto las bases como el interior y el exterior?

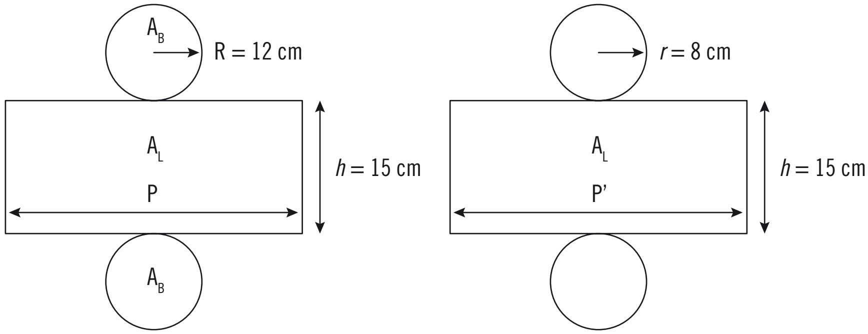


El área total a pintar será la suma de su área lateral exterior, más su área lateral interior, más el área de sus bases, que serán dos coronas circulares.

$$A_T = A_L + A_I + 2_{AB}$$

Como se trata de un cilindro recto, las áreas laterales, A_L y A_I, son igual al producto del perímetro de sus bases, P y P', por la altura del prisma o cilindro, h, es decir:

$$A_L = P \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$$
$$A_I = P' \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$



donde R y r' son los radios de los círculos exterior e interior, y de las coronas circulares que forman las bases.

El área de cada base será:

$$A_B = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

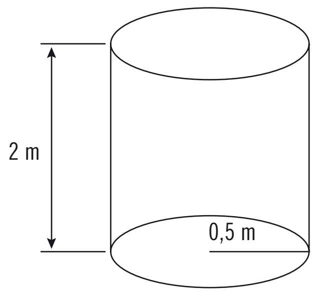
Luego:

$$A_T = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h + 2 \cdot \pi\ r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot (R^2 - r^2) = 2 \cdot \pi \cdot h\ (R + r)$$
$$+ 2 \cdot \pi\ (R^2 - r^2) = 2 \cdot \pi\ [h\ (R + r) + (R^2 - r^2)]$$

Como todos los valores son conocidos, solo hay que sustituirlos:

$$A_T = 2 \cdot \pi\ [h\ (R + r) + (R^2 - r^2)] = 2 \cdot \pi\ [15\ (12 + 8) + (12^2 - 8^2)]$$
$$= 2 \cdot \pi\ [15 \cdot 20) + (144 - 64)] = 2 \cdot \pi\ [300 + 80] = 2.386{,}4\ cm^2$$

9. Para el bidón de la figura se quiere calcular:



a. La cantidad de pintura necesaria para pintarlo por fuera, incluida la tapa, si con 5 kg de la misma se pueden pintar 35 m².

Hay que calcular el área exterior total del cilindro, que está formada por el área lateral y las áreas de las dos bases.

$$A_T = A_L + 2 \cdot AB$$

El perímetro de la base es:

$$P = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}5 = 3{,}14 \text{ m}$$

El área lateral es:

$$A_L = P \cdot h = 3{,}14 \cdot 2 = 6{,}28 \text{ m}^2$$

El área de una base es:

$$A_B = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 0{,}5^2 = \pi \cdot 0{,}25 = 0{,}78 \text{ m}^2$$

El área total es:

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 6{,}28 + 2 \cdot 0{,}78 = 7{,}84 \text{ m}^2$$

Para calcular la cantidad de pintura necesaria se hace una simple regla de tres:

$$\left.\begin{array}{r} 35\ m^2 \rightarrow 5\ kg \\ 7{,}84\ m^2 \rightarrow x\ kg \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{7{,}84 \cdot 5}{35} = 1{,}12\ kg$$

b. Los litros de agua que caben en él, sabiendo que 1 m² = 1.000 l.

Valor π = 3,14

$$V = A_B \cdot h$$

En este caso:

$$A_B = 0{,}78\ m^2$$
$$h = 2\ m$$

luego:

$$V = 0{,}78 \cdot 2 = 1{,}57\ m^3$$

Como 1 m² = 1.000 litros se tiene que:

$$V = 1{,}57 \cdot 1.000 = 1.570\ l$$

10. Se dispone de un depósito de almacenamiento de agua, de forma esférica con un diámetro de 5 m. Se pide:

a. ¿Cuántos litros de agua caben en el depósito, sabiendo que 1 m² = 1.000 litros?

El volumen de la esfera viene dado por la expresión:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Como D = 5 = 2r, entonces r = d/2 = 5/2 = 2,5 m

Luego,

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2{,}5^3 = 65{,}41 \text{ m}^3$$

Como 1 m^3 = 1.000 l, V = 65,41 · 1.000 = 65.410 l

Caben 65.410 litros de agua en el depósito.

b. ¿Cuántos kg de pintura se necesitan para pintarlo si con cada kg se pueden pintar 6 m^2?

Valor π = 3,14

El área de la esfera viene dada por la expresión:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

En este caso r = 2,5 m

Luego,

$$A = 4 \cdot \pi \cdot 2{,}5^2 = 78{,}5 \text{ m}^2$$

Para saber los kg de pintura se divide por el número de que se pueden pintar con cada kg de pintura:

Pintura necesaria = 78,54 : 6 = 13,08 kg.

Solucionario Capítulo 4

1. **La edad de un abuelo es de 60 años y la de su nieto, de 10 años. Calcule cuántos años deben transcurrir para que la edad del nieto sea 1/3 de la edad del abuelo y cuáles serán sus edades entonces.**

En este ejercicio, se conocen las edades actuales del abuelo y del nieto:

- Edad del abuelo: 60 años.
- Edad del nieto: 10 años.

Y se sabe que, dentro de unos años, la edad del nieto será 1/3 de la edad del abuelo o, lo que es lo mismo, la edad del abuelo será el triple de la de su nieto. Pero no se conoce cuántos años transcurrirán para que esto suceda, por lo que esta cantidad es una incógnita:

- x = años que transcurren para que la edad del abuelo sea el triple que la de su nieto.

Así:

- Dentro de x años, la edad del abuelo será: 60 + x años.
- Dentro de x años, la edad del nieto será: 10 + x años.
- Dentro de x años: $60 + x = 3(10 + x)$.

Realizando las operaciones algebraicas apropiadas, se obtiene:

$$60 + x = 3(10 + x)$$

$$60 + x = 30 + 3x$$
$$60 - 30 = 3x - x$$
$$30 = 2x$$

$$x = \frac{30}{2} = 15 \text{ años}$$

Dentro de 15 años, la edad del abuelo será el triple que la de su nieto.

- Dentro de *x* años, la edad del abuelo será: 60 + 15 = 75 años.
- Dentro de *x* años, la edad del nieto será: 10 + 15 = 25 años.

Se cumple que:

$$25 = \frac{75}{3}$$

2. **Un vehículo comercial que sale de su almacén para transportar una mercancía marcha a una velocidad constante de 90 km/h. Una hora más tarde, sale del mismo almacén otro vehículo comercial que realiza la misma ruta y que marcha a una velocidad de 120 km/h. Determine cuánto tiempo transcurrirá hasta que los dos vehículos se encuentren.**

Hay que tener en cuenta, además, que la velocidad es la relación entre el espacio recorrido y el tiempo empleado:

$$\text{Velocidad} = \frac{\text{Espacio}}{\text{Tiempo}}$$

Cuando los dos vehículos se encuentran, llevan el mismo espacio recorrido, al que se llamará s. Por lo tanto, podrá despejarse en la ecuación anterior:

$$\text{Espacio} = \text{velocidad} \cdot \text{tiempo}$$

$$s = v \cdot t$$

E igualarlo en ambos vehículos, con lo cual la única incógnita será el tiempo, ya que se conoce la velocidad de cada uno de ellos. Se llamará *vehículo 1* al que ha salido en primer lugar y *vehículo 2* al que ha salido con posterioridad.

Pero este ejercicio admite dos planteamientos:

Planteamiento 1:

- Como el vehículo 1 marcha a una velocidad de 90 km/h, sustituyendo valores en esta ecuación, queda:

$$s = 90 \cdot t$$

- Como el vehículo 2 marcha a una velocidad de 120 km/h, pero salió una hora más tarde, sustituyendo valores en esta ecuación, queda:

$$s = 120 \cdot (t - 1)$$

Igualando ambas ecuaciones, ya que, como se ha dicho, la distancia recorrida por ambos vehículos es la misma cuando están en el punto de encuentro, se obtiene:

$$90\ t = 120\ (t - 1) = 120\ t - 120$$
$$90\ t = 120\ t - 120$$
$$120 = 120\ t - 90\ t = 30\ t$$
$$t = \frac{120}{30} = 4\ h$$

Planteamiento 2:

- Como el vehículo 1 marcha a una velocidad de 90 km/h, pero salió una hora antes que el vehículo 2, sustituyendo valores en esta ecuación, queda:

$$s = 90 \cdot (t + 1)$$

- Como el vehículo 2 marcha a una velocidad de 120 km/h, sustituyendo valores en esta ecuación, queda:

$$s = 120 \cdot t$$

Igualando ambas ecuaciones, ya que, como se ha dicho, la distancia recorrida por ambos vehículos es la misma cuando están en el punto de encuentro, se obtiene:

$$90 \cdot (t + 1) = 120\ t$$

$$90\ t + 90 = 120\ t$$
$$90 = 120\ t - 90\ t = 30\ t$$
$$t = \frac{90}{30} = 3\ h$$

Los resultados obtenidos son distintos porque hay que tener en cuenta el vehículo que establece la relación. Así, si se preguntara al conductor del vehículo 1, diría que el vehículo 2 lo ha alcanzado cuando él ya había circulado 4 h. Sin embargo, al preguntar al conductor del vehículo 2, diría que tardó 3 h en llegar adonde se encontraba el vehículo 1. Ambas respuestas serían correctas y, únicamente, habría que tener en cuenta la hora de diferencia que hay entre las partidas de ambos vehículos para cuadrar los resultados.

3. **Un club deportivo prepara el serigrafiado de las camisetas que sus miembros usarán en sus actividades deportivas en tres tallas —P, M y G— para lo cual considera que necesitará cuatro veces más camisetas medianas que pequeñas y la mitad de camisetas grandes que medianas. Apunte cuántas camisetas se habrán serigrafiado de cada talla si, en total, han sido 497 camisetas.**

Si se llama x al n.º de camisetas que se imprimen de la talla pequeña, P, se obtiene:

- Cuatro veces más camisetas de la talla mediana que de la pequeña, luego el n.º de camisetas de la talla mediana, M, es: 4x.
- La mitad de camisetas de la talla grande que de la mediana, luego el n.º de camisetas de la talla grande, G, es: $1/2 \cdot 4x = 2x$.

- El total serigrafiado es 497 camisetas, luego:

$$x + 4x + 2x = 497$$
$$7x = 497$$
$$x = \frac{497}{7} = 71 \text{ camisetas}$$

Por tanto, se serigrafiarán 71 camisetas pequeñas, $4 \cdot 71 = 284$ camisetas medianas y $2 \cdot 71 = 142$ camisetas grandes.

4. La suma de los cuadrados de la edad que tiene hoy Lucas y de la que tendrá dentro de 3 años es 1.017. Averigüe la edad actual de Lucas.

- La incógnita a averiguar es la edad que tiene Lucas hoy, que se llamará x.
- La edad que tendrá Lucas dentro de 3 años será: $x + 3$.

Según el enunciado, la suma del cuadrado de la edad de Lucas hoy, x^2, y del cuadrado de la que tendrá dentro de 3 años, $(x + 3)^2$ es 1.017. La ecuación que resulta es:

$$x^2 + (x + 3)^2 = 1.017$$

El segundo término es el cuadrado de un binomio. Aplicando la fórmula correspondiente, se obtiene:

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$x^2 + x^2 + 6x + 9 = 1.017$$
$$2x^2 + 6x + 9 - 1.017 = 0$$
$$2x^2 + 6x - 1.008 = 0$$

Esta ecuación puede simplificarse dividiendo entre 2 ambos miembros de la igualdad, con lo cual la ecuación de segundo grado resultante será:

$$x^2 + 3x - 504 = 0$$

Sustituyendo en la fórmula general, se obtiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-504)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 2.016}}{2} =$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{2.025}}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{2.025}}{2} = \dfrac{-3 + 45}{2} = \dfrac{42}{2} = 21 \\[2ex] x_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{2.025}}{2} = \dfrac{-3 - 45}{2} = \dfrac{-48}{2} = -24 \end{cases}$$

De las dos raíces que se obtienen, -24 no tiene sentido, ya que no existen edades negativas, por lo tanto, la edad de Lucas es 21 años.

5. Si la suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 61, establezca de qué números se trata.

Llamando x a uno de los números, el otro será (x + 1) por ser el que lo sigue.

Según el enunciado, la suma de estos dos números es 61. La ecuación que resulta es:

$$x^2 + (x + 1)^2 = 61$$

Resolviendo el binomio que constituye el segundo término y operando, se obtiene:

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 + 2x + 1 &= 61 \\ 2x^2 + 2x + 1 - 61 &= 0 \\ 2x^2 + 2x - 60 &= 0 \\ x^2 + x - 30 &= 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la fórmula general, se obtiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{121}}{2} = \dfrac{-1 + 11}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \\[2ex] x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{121}}{2} = \dfrac{-1 - 11}{2} = \dfrac{-12}{2} = -6 \end{cases}$$

Las dos raíces obtenidas no son números consecutivos, ya que una es un número entero positivo y la otra es un número entero negativo. Si se consideraran representados sobre la recta real, distarían 11 unidades.

Por lo tanto, para calcular los dos números consecutivos, habrá que considerar cada raíz por separado:

- Si se considera que uno de los números es 5, el consecutivo será 5 + 1 = 6, por lo tanto, la suma de sus cuadrados será: $5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$.
- Si se considera que uno de los números es -6, el consecutivo será (-6) + 1 = (-5) y también se cumplirá que la suma de sus cuadrados es: $(-6)^2 + (-5)^2 = 61$.

6. Raúl ha vendido un libro del curso pasado por 24 €. Este precio es menor al de adquisición en un tanto por ciento igual a la cifra, en euros, por el que lo adquirió. Señale cuál fue ese precio.

La incógnita es el precio original del libro, por tanto:

x = precio original del libro

Se sabe que:

- Ese precio se obtendrá sumando, al precio de venta, el porcentaje de valor que ha perdido el manual: x – 24.
- El enunciado también dice que la cifra que representa la pérdida de valor del libro en tanto por ciento coincide con la que corresponde al precio original del libro. Esa porcentaje de pérdida de valor, será:

$$x \cdot \frac{x}{100}$$

Igualando términos, se obtiene:

$$x - 24 = x \cdot \frac{x}{100} = \frac{x^2}{100}$$

Operando, se obtiene:

$$x^2 = 100 \cdot (x - 24)$$
$$x^2 = 100x - 100 \cdot 24$$
$$x^2 = 100x - 2.400$$
$$x^2 - 100x + 2.400 = 0$$

Sustituyendo en la fórmula general, se obtiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{100 \pm \sqrt{(-100)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2.400}}{2 \cdot 1} = \frac{100 \pm \sqrt{10.000 - 9.600}}{2} =$$

$$= \frac{100 \pm \sqrt{400}}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{100 + \sqrt{400}}{2} = \dfrac{100 + 20}{2} = \dfrac{120}{2} = 60 \\[2ex] x_2 = \dfrac{100 - \sqrt{400}}{2} = \dfrac{100 - 20}{2} = \dfrac{80}{2} = 40 \end{cases}$$

Ambas soluciones son correctas y cumplen las condiciones establecidas en el enunciado, luego:

- Bien el libro costó originalmente 60 € y el precio de reventa ha sido un 6 % menor de este valor, ya que:

$$6\ \%\ \text{de}\ 60 = \frac{6 \cdot 60}{100} = \frac{360}{100} = 36$$

$$36 + 24 = 60\ €$$

- Bien el libro costó originalmente 40 € y el precio de reventa ha sido un 4 % de menor de ese valor, ya que:

$$4\ \%\ \text{de}\ 40 = \frac{4 \cdot 40}{100} = \frac{160}{100} = 16$$

$$16 + 24 = 40\ €$$

7. Un hotel tiene habitaciones dobles y sencillas. El total de habitaciones es 200 y el total de camas es 340. Halle cuántas habitaciones tiene dobles y cuántas sencillas.

Los datos son los siguientes:

- N.º total de habitaciones: 200.
- N.º total de camas: 340.

Las incógnitas son el número de habitaciones que hay de cada clase:

- Se llama x al n.º de habitaciones simples.
- Se llama y al n.º de habitaciones dobles.

Las ecuaciones que se plantean son las siguientes:

- Se sabe que la suma del n.º de habitaciones simples y dobles es 200:

$$x + y = 200$$

- Se sabe que las habitaciones simples tienen una cama y las dobles 2, por lo que el número de habitaciones simples por 1 cama cada una más el número de habitaciones dobles por 2 camas cada una deben sumar 340:

$$x + 2y = 340$$

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{array}{ll} x + y = 200 & [1] \\ x + 2y = 340 & [2] \end{array}$$

Antes de proceder a su resolución, se comprueba si tiene una única solución. Como:

$$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{2}$$

El sistema es compatible determinado y puede resolverse por cualquiera de los métodos vistos en este capítulo. En este caso, va a resolverse por el método de reducción. La incógnita más fácil de eliminar es la x. Para conseguir coeficientes que sean números opuestos, solo hay que multiplicar por -1 la ecuación [1]. Así, queda:

$$-x - y = -200 \qquad [3]$$

Sumando las ecuaciones [2] y [3], se elimina la x, con lo que quedaría una ecuación con una incógnita:

$$\begin{array}{rrrrl} & -x & -\ y & = & -200 \\ - & x & +2y & = & 340 \\ \hline & 0 & +\ y & = & -200 \ +340 \end{array}$$

Resolviendo la operación, se obtiene:

$$y = 140$$

Sustituyendo el valor calculado en [1], se obtiene:

$$x + 140 = 200$$

Despejando el valor de la incógnita y operando, se obtiene:

$$x = 200 - 140 = 60$$

Por lo tanto, hay 140 habitaciones dobles y 60 habitaciones sencillas.

8. Para comprar una lavadora de 400 €, Ana reúne 11 billetes de 20 y 50 €. Indique cuántos habrá de cada clase.

Los datos son los siguientes:

- N.º total de billetes: 11.
- Importe total: 400.

Las incógnitas son el número de billetes que hay de cada clase:

- Se llama x al n.º de billetes de 20 €.
- Se llama y al n.º de billetes de 50 €.

Las ecuaciones que se plantean son las siguientes:

- Se sabe que la suma del n.º de billetes es 11:

$$x + y = 11$$

- Se sabe que, multiplicando el n.º de billetes de 20 € por la cantidad de 20 y sumándole el número de billetes de 50 € multiplicado por la cantidad de 50, se obtiene el capital total, 400 €:

$$20x + 50y = 400$$

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{array}{ll} x + y = 11 & [1] \\ 20x + 50y = 400 & [2] \end{array}$$

Antes de proceder a su resolución, se comprueba si tiene una única solución. Como:

$$\frac{1}{20} \neq \frac{1}{50}$$

El sistema es compatible determinado y puede resolverse por cualquiera de los métodos vistos en este capítulo. En este caso, va a resolverse por el método de sustitución. Se despeja la x en la ecuación [1]:

$$x = 11 - y \qquad [3]$$

Se sustituye esta expresión en la ecuación [2]:

$$\begin{aligned} 20(11 - y) + 50y &= 400 \\ 220 - 20y + 50y &= 400 \\ -20y + 50y &= 400 - 220 \\ 30y &= 180 \end{aligned}$$

$$y = \frac{180}{30} = 6$$

Sustituyendo y = 6 en la expresión [3] en la que se ha despejado, se obtiene:

$$x = 11 - 6 = 5$$

Por lo tanto, hay 5 billetes de 20 € y 6 billetes de 50 €.

9. En la recreación de un mercado medieval, en el que los productos se venden al peso utilizando las antiguas medidas castellanas, Carmen ha comprado un queso de 5 lb y 7 oz y un pan de 2 lb y 3 oz. Cuando llega a casa, pesa ambos productos para saber su peso en gramos y ve que el queso pesa 2.501,25 g y el pan pesa 1.006,25 g. Deduzca el valor en gramos de la libra y de la onza castellanas.

Los datos son los siguientes:

- Peso en gramos del queso: 2.501,25.
- Peso en gramos del pan: 1.006,25.
- Peso del queso en unidades castellanas: 5 lb y 7 oz.
- Peso del pan en unidades castellanas: 2 lb y 3 oz.

Las incógnitas son el peso en gramos de cada unidad:

- Se llama x al peso equivalente en gramos de la libra castellana.
- Se llama y al peso equivalente en gramos de la onza castellana.

Las ecuaciones que se plantean son las siguientes:

- Se sabe que la suma de las libras castellanas más las onzas castellanas que pesa el queso es 2.501,25 g:

$$5x + 7y = 2.501,25$$

- Se sabe que la suma de las libras castellanas más las onzas castellanas que pesa el pan es 1.006,25 g:

$$2x + 3y = 1.006,25$$

El sistema de ecuaciones es:

$$5x + 7y = 2.501,250 \qquad [1]$$
$$2x + 3y = 1.006,25 \qquad [2]$$

Antes de proceder a su resolución, se comprueba si tiene una única solución. Como:

$$\frac{5}{2} \neq \frac{7}{3}$$

El sistema es compatible determinado y puede resolverse por cualquiera de los métodos vistos en este capítulo. En este caso, va a resolverse por el método de igualación. Se despeja la y en cada ecuación, con lo cual se obtiene:

$$y = \frac{2.501,25 - 5x}{7} \qquad [3]$$

$$y = \frac{1.006,25 - 2x}{3} \qquad [4]$$

Se igualan las expresiones [3] y [4], obteniendo la ecuación:

$$\frac{2.501,25 - 5x}{7} = \frac{1.006,25 - 2x}{3}$$

Se opera para despejar la incógnita x:

$$3 \cdot (2.501,25 - 5x) = 7 \cdot (1.006,25 - 2x)$$
$$7.503,75 - 15x = 7.043,75 - 14x$$
$$7.503,75 - 7.043,75 = 15x - 14x$$

$$460 = x$$

Sustituyendo x = 460 en la expresión [3], se obtiene:

$$y = \frac{2.501,25 - 5x}{7} = \frac{2.501,25 - 5 \cdot 460}{3} = 28,75$$

Por lo tanto, la libra castellana pesa 460 g y la onza castellana pesa 28,75 g.

10. Encuentre empleando el método gráfico un número de dos cifras en el que la cifra de las decenas es el triple de la cifra de las unidades y tal que, cuando, a este número, se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtiene 36.

Lo primero que hay que hacer es plantear un sistema de ecuaciones para, luego, representarlo gráficamente.

Para plantear el sistema, se sabe que:

- Se trata de un número de dos cifras, por lo que tiene unidades y decenas.
- La cifra de las decenas es el triple de la cifra de las unidades.
- La diferencia entre este número y el que se construye invirtiendo la posición de sus cifras es 36.

Las incógnitas son las cifras que ocupan cada posición:

- Se llama x a la cifra que ocupa el lugar de las unidades.
- Se llama y a la cifra que ocupa el lugar de las decenas.

Las ecuaciones que se plantean son las siguientes:

- Se sabe que el número es de dos cifras y que tiene unidades y decenas:

$$10y + x$$

- Se sabe que la cifra de las decenas es el triple de la cifra de las unidades:

$$y = 3x$$

Ordenando en forma de ecuación, queda:

$$3x - y = 0$$

- Se sabe que la diferencia entre este número y el que se construye invirtiendo la posición de sus cifras es 36:

$$(10y + x) - (10x + y) = 36$$
$$9y - 9x = 36$$
$$y - x = 4$$

Ordenando las incógnitas:

$$-x + y = 4$$

El sistema de ecuaciones es, pues:

$$3x - y = 0 \qquad [1]$$
$$-x + y = 4 \qquad [2]$$

Antes de proceder a su resolución, se comprueba si tiene una única solución. Como:

$$\frac{3}{-1} \neq \frac{-1}{1}$$

El sistema es compatible determinado y puede resolverse.

Ahora, hay que convertir cada ecuación en una función lineal:

$$\text{De } [1] \rightarrow y = 3x \qquad [3]$$
$$\text{De } [2] \rightarrow y = x + 4 \qquad [4]$$

Se construye una tabla de valores para cada una de las funciones anteriores:

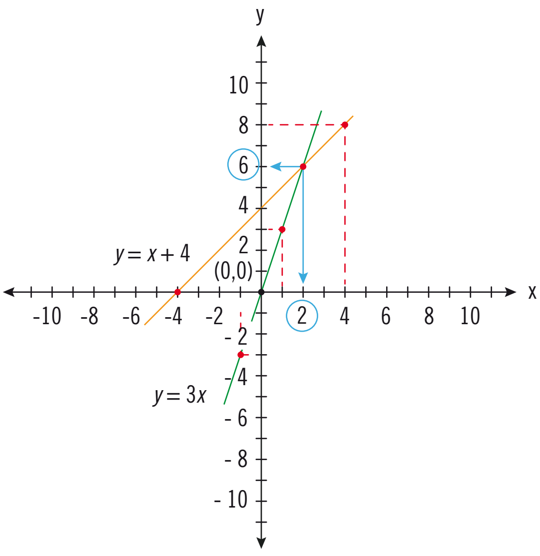
La tabla de valores para [3] es:

x	-1	0	1
y	-3	0	1

La tabla de valores para [4] es:

x	-4	0	4
y	0	4	8

Se trasladan los valores de las tablas a unos ejes de coordenadas y se unen los puntos para obtener las rectas correspondientes:



Se observa en la gráfica que el punto de corte de las rectas es el punto (2, 6). Por lo tanto:

$x = 2$ es la cifra que ocupa el lugar de las unidades.
$y = 6$ es la cifra que ocupa el lugar de las decenas.

El número buscado es 62.

Se comprueba que:

- $6 = 3 \cdot 2$.
- Invirtiendo las cifras, se obtiene el número 26.
- $62 - 26 = 36$.

Solucionario Capítulo 5

1. En un comedor escolar, el 55 % de los niños toma de postre fruta, el 33 % toma yogur y el 12 % restante toma flan. Si comen 300 niños, indique cuántos toman cada postre.

En este caso, el problema se plantea de forma inversa porque se conocen las frecuencias relativas y, a partir de ellas, hay que encontrar el número de elementos, que coincide con la frecuencia absoluta de cada variable. Se conoce que el tamaño de la muestra es N = 300. Los otros datos son:

- Frecuencia relativa de fruta = 55 %. El valor en tanto por uno (p. u.) = 0,55.
- Frecuencia relativa de yogur = 33 %. El valor en tanto por uno (p. u.) = 0,33.
- Frecuencia relativa de flan = 12 %. El valor en tanto por uno (p. u.) = 0,12.

Teniendo en cuenta que la:

$$\text{Frecuencia relativa (p.u.)} = \frac{\text{Frecuencia absoluta}}{\text{Tamaño de la muestra}}$$

Se despeja el valor de la frecuencia absoluta como:

$$\text{Frecuencia absoluta} = \text{frecuencia relativa (p. u.)} \cdot \text{tamaño de la muestra}$$

Para los que toman fruta:

$$\text{Frecuencia absoluta} = 0{,}55 \cdot 300 = 165$$

Para los que toman yogur:

$$\text{Frecuencia absoluta} = 0{,}33 \cdot 300 = 99$$

Para los que toman flan:

$$\text{Frecuencia absoluta} = 0{,}12 \cdot 300 = 36$$

2. En el colegio anterior, las nacionalidades de sus alumnos son:

Nacionalidad	Número de alumnos
España	180
Inglaterra	18
Marruecos	30
Portugal	12
Rumanía	24
Ucrania	36
Total	300

Se pide:

- **Calcular las frecuencias relativas.**
- **Elaborar un diagrama de sectores correspondiente a las frecuencias relativas en tanto por ciento.**

Cada alumno es un elemento de la población en estudio, por lo tanto, se tienen 300 elementos (tamaño de la muestra).

Las frecuencias relativas se calculan aplicando la fórmula:

$$\text{Frecuencia relativa (p.u.)} = \frac{\text{Frecuencia absoluta}}{\text{Tamaño de la muestra}}$$

Los resultados se representan en la tabla siguiente:

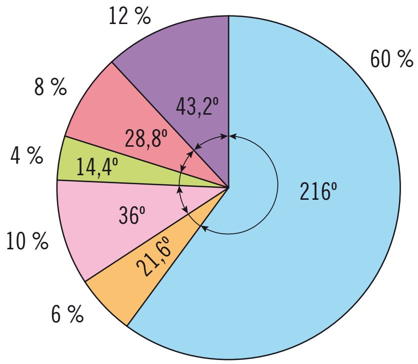
Nacionalidad	**Frecuencias absolutas**	**Frecuencias relativas (%)**
España	180	60
Inglaterra	18	6
Marruecos	30	10
Portugal	12	4
Rumanía	24	8
Ucrania	36	12
Total	300	100

- Hay que calcular los grados que corresponden a cada sector, para lo cual se emplea la fórmula:

$$\alpha = f \cdot \frac{360}{N}$$

Se incluye una nueva columna en la tabla en la que se calculan los grados que abarca cada sector:

Nacionalidad	**Frecuencias absolutas**	**Frecuencias relativas (p. u.)**	**Porcentaje (%)**	**Grados (°)**
España	180	0,60	60	216
Inglaterra	18	0,06	6	21,6
Marruecos	30	0,10	10	36
Portugal	12	0,04	4	14,4
Rumanía	24	0,08	8	28,8
Ucrania	36	0,12	12	43,2
Total	300	1	100	360



3. **La producción diaria de huevos registrada en una semana en una granja avícola es, en número de unidades, de:**

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
10.000	9.680	9.760	9.920	10.050	9.990	9.800

Halle la puesta media diaria.

La puesta media diaria se calcula hallando la media aritmética de las puestas de los 7 días. La media aritmética de los datos es el resultado de dividir la suma de todos entre el número de datos. La fórmula que da la media es, en este caso:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

- Como cada valor se repite solo una vez, su frecuencia es 1.
- El número de datos es 7.

Sustituyendo valores, se obtiene:

$$\overline{X} = \frac{10.000 + 9.680 + 9.760 + 9.920 + 10.050 + 9.990 + 9.802}{7} = \frac{69.202}{7} = 9.886$$

Por tanto, la puesta media diaria es de 9.886 huevos.

4. En una envasadora de café, han conseguido una mezcla especial a base de cafés de diferentes procedencias. Para mantener el secreto de la mezcla, cada tipo de café se identifica con una letra, de tal forma que, para obtener 100 kg de su producto, las cantidades son las siguientes: 40 kg de variedad A (a 1,05 €/kg), 3 kg de variedad B (a 9,75 €/kg), 25 kg de variedad C (a 2 €/kg), 30 kg de variedad E (a 1,85 €/kg) y 2 kg de variedad F (a 20 €/kg). Calcule a cómo sale el kilogramo de la mezcla especial de café.

La variable que está estudiándose es el precio del kilogramo de café mezcla especial.

Se resuelve el problema como si cada kilogramo de café fuera un elemento de la población que está estudiándose.

Los precios de los distintos tipos son los valores que toma la variable. Cada valor se repite tantas veces como kilogramos de dicha variedad se aporten a la mezcla. Por tanto, los números de kilogramos de cada ingrediente son las frecuencias (de 1,05 €/kg hay 40 elementos).

El precio del kilogramo de mezcla será la media aritmética de la variable.

Poniendo los datos en forma de tabla:

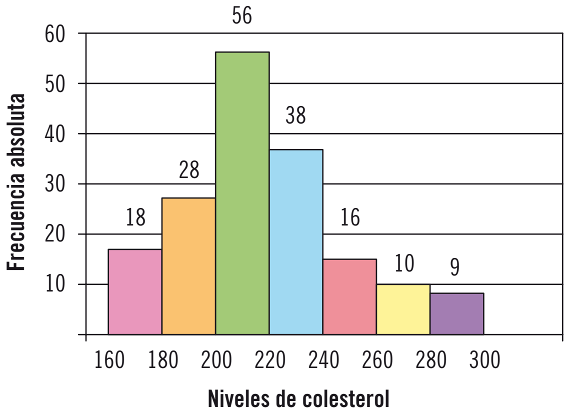
Valores (€/kg)	Frecuencia absoluta (kg)
1,05	40
9,75	3
2	25
1,85	30
20	2
Total	100

Para calcular la media aritmética, se aplica la fórmula general:

$$\bar{X} = \frac{40 \cdot 1{,}05 + 3 \cdot 9{,}75 + 25 \cdot 2 + 30 \cdot 1{,}85 + 2 \cdot 20}{7} = \frac{216{,}75}{100} = 2{,}1675$$

Por tanto, cada kilogramo de café mezcla especial costará, tras el redondeo, 2,17 €.

5. La siguiente gráfica muestra los niveles de colesterol detectados en un estudio a 175 personas. Teniendo en cuenta que se considera normal un nivel menor de 200, normal-alto los valores comprendidos entre 200 y 240 y un nivel alto aquel que está por encima de 240, determine la frecuencia absoluta acumulada y la frecuencia relativa acumulada para cada uno de los casos (tener el colesterol normal, normal-alto y alto). Especifique también la media, la mediana y la moda.



El gráfico corresponde a un histograma, ya que, al no haber espacios entre las barras, los datos se dan en intervalos.

Para poder operar con mayor exactitud, se pasan los datos del gráfico a una tabla. Además, se calcula la frecuencia relativa, que se incluye en una nueva columna, aplicando la fórmula frecuencia relativa = frecuencia absoluta/tamaño de la muestra y teniendo en cuenta que el tamaño de la muestra es 175:

Niveles de colesterol	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
[160, 180]	18	18/175 = 0,1028
[180, 200]	28	28/175 = 0,16
[200,220]	56	56/175 = 0,32
[220, 240]	38	38/175 = 0,2171
[240, 260]	16	16/175 = 0,0914
[260, 280]	10	10/175 = 0,0571
[280, 300]	9	9/175 = 0,0514
Total	175	0,999 = 1

La frecuencia absoluta acumulada se halla sumando las frecuencias absolutas observadas hasta el valor dado. Como se piden para tres casos distintos, hay que calcular los valores acumulados desde el intervalo que corresponde al comienzo del caso hasta el que corresponde al final. Así, se obtiene que:

Niveles de colesterol	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada
[160, 180]	18	18
[180, 200]	28	18 + 28 = 46
[200, 220]	56	56
[220, 240]	38	56 + 38 = 94
[240, 260]	16	16
[260, 280]	10	16 + 10 = 26
[280, 300]	9	26 + 9 = 35
Total	175	175

Para unos niveles de colesterol menores de 200, la frecuencia absoluta acumulada es 46, es decir, 46 de los individuos analizados tienen niveles de colesterol normales.

Para unos niveles de colesterol entre 200 y 240, la frecuencia absoluta acumulada es 94, es decir, 94 de los individuos analizados tienen niveles de colesterol normal-alto.

Para unos niveles de colesterol mayores de 240, la frecuencia absoluta acumulada es 35, es decir, 35 de los individuos analizados tienen niveles de colesterol altos.

Las frecuencias relativas acumuladas para cada uno de los casos considerados son:

Niveles de colesterol	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
[160, 180]	0,1028	0,1028
[180, 200]	0,16	0,16 + 0,1028 = 0,2628
[200, 220]	0,32	0,32
[220, 240]	0,2171	0,2171 + 0,32 = 0,5371
[240, 260]	0,0914	0,0914
[260, 280]	0,0571	0,0571 + 0,0914 = 0,1485
[280, 300]	0,0514	0,0514 + 0,1485 = 0,1999
Total	0,999 = 1	0,9998 = 1

Para unos niveles de colesterol menores de 200, la frecuencia relativa acumulada es 0,2628, es decir, el 26,28 % de los individuos analizados tienen niveles de colesterol normales.

Para unos niveles de colesterol entre 200 y 240, la frecuencia relativa acumulada es 0,5371, es decir, el 51,71 % de los individuos analizados tienen un nivel de colesterol de normal-alto.

Para unos niveles de colesterol mayores de 240, la frecuencia relativa acumulada es 0,1999, es decir, el 19,99 % de los individuos analizados tienen niveles de colesterol altos.

Para calcular la media aritmética, se aplica la fórmula general, pero sustituyendo el valor de la variable por el de la marca de clase, por lo que hay que calcular antes la marca de clase de cada intervalo. Para el primer intervalo de la tabla:

$$160 - 180 = 20$$
$$20 : 2 = 10$$
$$160 + 10 = 170$$

Procediendo de igual forma con el resto de intervalos, se obtienen los valores que se han incluido en la columna de la marca de clase:

Niveles de colesterol	**Marca de clase**	**Frecuencia absoluta**
[160, 180]	170	18
[180, 200]	190	28
[200, 220]	210	56
[220, 240]	230	38
[240, 260]	250	16
[260, 280]	270	10
[280, 300]	290	9
Total		175

Se tiene un valor para la media de:

$$\bar{X} = \frac{170 \cdot 18 + 190 \cdot 28 + 210 \cdot 56 + 230 \cdot 38 + 250 \cdot 16 + 270 \cdot 10 + 290 \cdot 9}{175} =$$

$$= \frac{38.190}{175} = 218,22$$

Como la variable está agrupada en intervalos, hay que averiguar cuál es el intervalo mediano, que es aquel cuya frecuencia acumulada supere la mitad de los datos disponibles. Como mediana, se toma la marca de clase de dicho intervalo.

Niveles de colesterol	**Marca de clase**	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia absoluta acumulada**
[160,180]	170	18	18
[180, 200]	190	28	46
[200, 220]	210	56	102
[220, 240]	230	38	140
[240, 260]	250	16	156
[260, 280]	270	10	166
[280, 300]	290	9	175
Total		175	

Los datos disponibles son 175. La mitad de este valor es 87,5. El primer valor de la frecuencia acumulada que supera esta cantidad se encuentra en el intervalo [200, 220]. Por tanto, este es el intervalo mediano. Como el número de intervalos es impar, la mediana es el valor de la marca de clase de este intervalo, esto es, 210.

La moda es el valor más repetido, esto es, el valor de la variable estadística que tiene mayor frecuencia. Al estar las variables agrupadas en intervalos, la moda es la marca de clase del intervalo modal de mayor frecuencia. En el gráfico de barras, se ve que este intervalo es [200, 220], por tanto, la moda es 210.

6. En una empresa dedicada al mecanizado de piezas metálicas, uno de los productos fabricados es una chapa para nivelación en la que se realiza un agujero pasante. Está detectándose que, en varias de estas piezas, el agujero no está siendo mecanizado correctamente, ya que los orificios difieren de la medida estándar. Las variaciones detectadas son las siguientes:

Error de diámetro (mm)	Número de piezas
0,2	10
0,22	30
0,25	15
0,1	20
0,09	25
Total	100

Apunte el rango de error cometido en el mecanizado de estas piezas y la desviación típica.

El rango es la diferencia entre el mayor y el menor valor que toma la variable. El mayor error en el mecanizado corresponde a 0,25 y el menor es 0,09, por tanto, el rango es:

$$0{,}25 - 0{,}09 = 0{,}16$$

Luego hay 0,16 mm de diferencia entre los diámetros que menos difieren del estándar fijado y los que más alejados se encuentran de este estándar.

Calculando la desviación típica, se conseguirá saber cuánto difieren los datos del valor de la media. Para conocer su valor, habrá que calcular primero la media aritmética; luego, la varianza, y, por último, la desviación típica, como la raíz cuadrada de la anterior.

La media aritmética es:

$$\overline{X} = \frac{0{,}2 \cdot 10 + 0{,}22 \cdot 30 + 0{,}25 \cdot 15 + 0{,}1 \cdot 20 + 0{,}09 \cdot 25}{100} = \frac{16{,}6}{100} = 0{,}166$$

La varianza se calcula aplicando la fórmula:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

Donde la desviación es $d_i = x_i - x$. Se incluye en la tabla una columna en la que se calcula este valor:

Error de diámetro (mm)	Frecuencia absoluta	|Desviación|
0,2	10	|0,2 – 0,166| = 0,034
0,22	30	|0,22 – 0,166| = 0,054
0,25	15	|0,25 – 0,166| = 0,084
0,1	20	|0,1 – 0,166| = 0,066
0,09	25	|0,09 – 0,166| = 0,076
Total	100	

Sustituyendo los valores calculados en la nueva columna en la fórmula anterior, se obtiene:

$$s^2 = \frac{(0{,}034)^2 \cdot 10 + (0{,}054)^2 \cdot 30 + (0{,}084)^2 \cdot 15 + (0{,}066)^2 \cdot 20 + (0{,}076)^2 \cdot 25}{100} =$$

$$= \frac{0{,}4364}{100} = 0{,}004364$$

Una vez conocida la varianza, se calcula la desviación típica como la raíz cuadrada de este valor. Por tanto, se obtiene que:

$$\sigma = \sqrt{0{,}004364} = 0{,}066$$

Así que el promedio de variación de los diámetros respecto al estándar es de 0,166, con una tendencia a variar por encima o por debajo de ese número de 0,066.

7. En una sala de cine, se ha realizado el pase previo de dos películas con la intención de estrenar primero aquella cuyos datos de aceptación hayan sido más discrepantes. Al pase, han acudido 75 personas, que han valorado de 1 a 5 las películas según les hayan gustado menos o más. Los resultados han sido los siguientes:

PELÍCULA A		**PELÍCULA B**	
Puntuación	Frecuencia absoluta	Puntuación	Frecuencia absoluta
1	10	1	26
2	15	2	3
3	30	3	17
4	14	4	12
5	6	5	17
Total	75	**Total**	75

Para valorar las películas, habrá que conocer su grado de aceptación, para lo cual será necesario establecer la puntuación media que se da a cada una. Así pues, las puntuaciones medias para cada film son:

$$\bar{X}_A = \frac{1 \cdot 10 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 30 + 4 \cdot 14 + 5 \cdot 6}{75} = \frac{216}{75} = 2,88$$

$$\bar{X}_B = \frac{1 \cdot 26 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 17 + 4 \cdot 12 + 5 \cdot 17}{75} = \frac{216}{75} = 2,88$$

Como, en ambos casos, las medias son iguales, se buscan otros criterios de valoración, por lo que hay que calcular la desviación típica partiendo, para ello, de la varianza. Se calcula primero $|d_i = x_i - \bar{x}|$ y se incluye, en la tabla, para cada película, una columna en la que se calcula este valor:

PELÍCULA A			PELÍCULA B		
Puntuación	**Frecuencia absoluta**	**|Desviación|**	**Puntuación**	**Frecuencia absoluta**	**|Desviación|**
1	10	$\|1 - 2,88\| = 1,88$	1	26	$\|1 - 2,88\| = 1,88$
2	15	$\|2 - 2,88\| = 0,88$	2	3	$\|2 - 2,88\| = 0,88$
3	30	$\|3 - 2,88\| = 0,12$	3	17	$\|3 - 2,88\| = 0,12$
4	14	$\|4 - 2,88\| = 1,12$	4	12	$\|4 - 2,88\| = 1,12$
5	6	$\|5 - 2,88\| = 2,12$	5	17	$\|5 - 2,88\| = 2,12$
Total	75		**Total**	75	

Las derivaciones típicas son:

$$s^2_A = \frac{(1,88)^2 \cdot 10 + (0,88)^2 \cdot 15 + (0,12)^2 \cdot 30 + (1,12)^2 \cdot 14 + (2,12)^2 \cdot 6}{75} =$$

$$= \frac{91,92}{75} = 1,2256$$

$$\sigma_A = \sqrt{1,2256} = 1,107$$

$$s^2_B = \frac{(1{,}88)^2 \cdot 26 + (0{,}88)^2 \cdot 3 + (0{,}12)^2 \cdot 17 + (1{,}12)^2 \cdot 12 + (2{,}12)^2 \cdot 17}{75} =$$

$$= \frac{185{,}92}{75} = 2{,}4789$$

$$\sigma_B = \sqrt{2{,}4789} = 4{,}957$$

Como la desviación típica que se ha obtenido para el pase de la película B es mayor que la obtenida para el pase de la película A, los valores calculados para la película B se alejan más de los valores medios.

Al tener dos conjuntos de datos, puede comprobarse calculando el coeficiente de variación. La relación que existe entre la desviación típica y la media, en cada caso, es:

$$CV_A = \frac{\sigma_A}{\bar{x}_A} \cdot 100 = \frac{1{,}107}{2{,}88} \cdot 100 = 38{,}43$$

$$CV_B = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} \cdot 100 = \frac{4{,}957}{2{,}88} \cdot 100 = 172{,}11$$

En el caso B, la desviación típica es mayor. Además, al ser mayor a 100, indica directamente que hay una alta heterogeneidad en los datos. Por tanto, deberá estrenarse primero la película B.

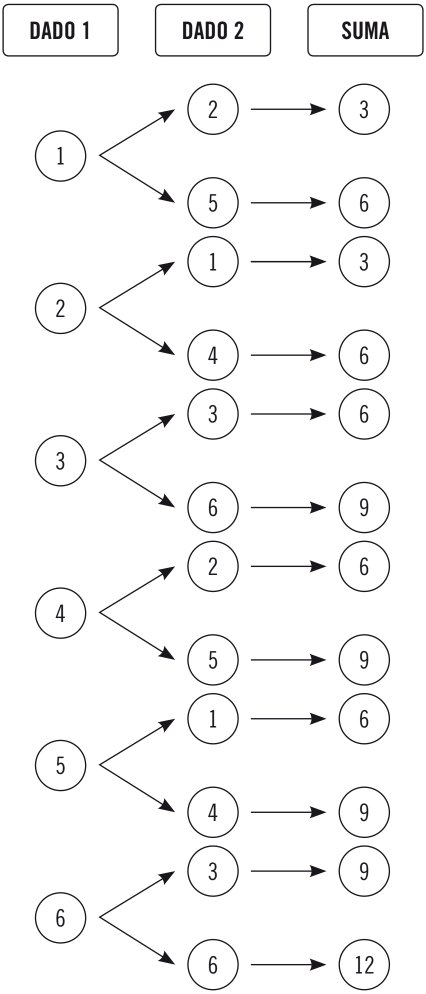
8. Halle la probabilidad de que, al lanzar dos dados (dado 1 y dado 2), la suma de los puntos de las caras visibles sea...

a. ... múltiplo de 3.

SOLUCIÓN:

Los números múltiplos de 3 que pueden obtenerse con los números que aparecen en las caras de los dados son: 3, 6, 9 y 12 (pues el siguiente múltiplo de 3, 15, no puede obtenerse sumando las puntuaciones máximas de dos dados, 6 + 6).

Los casos que pueden presentarse en el suceso aleatorio de lanzar dos veces y que la suma sea múltiplo de 3 son:



Es decir, hay 12 posibles casos, con lo que n = 12.

El número de combinaciones que pueden obtenerse cuando se lanzan los dos dados es $6 \cdot 6 = 36$. Así pues, N = 36.

Por lo tanto, se obtiene que:

$$P\,(\text{múltiplo de 3}) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

b. ... impar.

SOLUCIÓN:

Los números impares se obtienen sumando las puntuaciones de dos dados cuando la puntuación de uno de los dados es impar y la del otro dado es par.

Los casos que pueden presentarse en el suceso aleatorio de lanzar dos dados y que la suma sea impar:

Dado 1	Dado 2	Suma	Dado 1	Dado 2	Suma	Dado 1	Dado 2	Suma
1	2	3	1	4	5	1	6	7
2	1	3	2	3	5	2	5	7
3	2	5	3	4	7	3	6	9
4	1	5	4	3	7	4	5	9
5	2	7	5	4	9	5	6	11
6	1	7	6	3	9	6	5	11

Es decir, hay 18 posibles casos, con lo que n = 18.

El número de combinaciones que pueden obtenerse al lanzar los dos dados es nuevamente 6 · 6 = 36. Así pues, N = 36.

Por lo tanto, se obtiene que:

$$P\,(\text{impar}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

c. ... un cuatro doble.

SOLUCIÓN:

La única combinación posible es que se obtenga un 4 al lanzar cada uno de los dados. Por tanto, se trata de dos sucesos independientes y compatibles. Sean, pues, los sucesos:

- A = obtener un 4 en el dado 1.
    - Casos favorables = 4, n = 1.
    - Casos posibles = 6, N = 6.

Luego:

$$p\,(A) = \frac{1}{6}$$

- B = obtener un 4 en el dado 2.

Los casos favorables y los posibles son los mismos que en el suceso anterior, luego:

$$p\,(B) = \frac{1}{6}$$

La probabilidad de que ambos se verifiquen simultáneamente es igual al producto de las probabilidades de cada uno de ellos.

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

$$p\,(A \cap B) = p\,(A) \cdot p\,(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

9. Una máquina imprime 600 folletos en B/N y 1.600 en color. El porcentaje de folletos B/N que han salido con errores es del 3 % y, en los folletos a color, este porcentaje se eleva hasta el 7 %. Averigüe el porcentaje de que, al elegir un folleto al azar, sea defectuoso.

Sean los sucesos:

- A = elegir un folleto a color.
- B = elegir un folleto en B/N.
- C = elegir un folleto defectuoso.

Se trata de un caso de probabilidad condicionada. La probabilidad de que un folleto sea defectuoso es:

$$p\,(C) = p\,(C \cap A) + p\,(C \cap B) = p\left(\frac{C}{A}\right) \cdot p\,(A) + p\left(\frac{C}{B}\right) \cdot p\,(B)$$

Por tanto, se obtiene que:

$$p\,(C) = \frac{3}{100} \cdot \frac{600}{2.200} + \frac{7}{100} \cdot \frac{1.600}{2.200} = \frac{1.800}{220.000} + \frac{11.200}{220.000} = \frac{13.000}{220.000} = 0{,}059$$

Por lo que hay un 5,9 % de posibilidades de que, al elegir un folleto, sea defectuoso.

10. El 20 % de los clientes de una cafetería desayuna café solo, el 60 % acompaña su bebida de desayuno con tostadas y un 15 % desayuna el café solo y tostadas. Los restantes clientes optan por el café con leche para beber y por la tarta para acompañar la bebida. Si se elige uno al azar, establezca:

- **La probabilidad de que no tome ni café solo ni tostadas.**
- **La probabilidad de que pertenezca al grupo de los que desayunan café solo con tostadas.**

Para resolver este ejercicio, se construye una tabla de contingencias a partir de los datos del enunciado:

	Café solo	Café con leche	
Tostada	**15**	45	**60**
Tarta	5	35	40
	20	80	**100**

Sean los sucesos:

- A = desayunar café solo.
- B = desayunar tostadas.

En la tabla, se ve que los sucesos desayunar café con leche y desayunar tarta son los sucesos contrarios a los anteriores, luego:

- A' = desayunar café con leche.
- B" = desayunar tarta.

Hay que calcular la probabilidad de que, elegido un cliente, desayune café con leche y tarta, luego:

$$p\,(A' \cap B') = \frac{35}{100} = \frac{7}{20} = 0{,}35$$

En este caso, la probabilidad a calcular será:

$$p\,(A \cap B) = \frac{15}{100} = 0{,}15$$